Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2006

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: ______

MA-1123 DE HONOR—Primer parcial—

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Debe resolver cuatro, cualesquiera de los cinco ejercicios.

1. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por $S = \{\xi \,/\, \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3 = 0\}$ y T el subespacio generado por $\eta = (1, 1, 2)$

   a) Demuestre que $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

   b) Encuentre la matriz A que describe la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre S, con núcleo T.

2. Sean S y T dos **subespacios afines** de K^n. Sea $d =$ dim S y $e =$ dim T.

   a) Demuestre que si $S \cap T \neq \emptyset$, entonces dim $S \cap T \geq d + e - n$

   b) Concluya que si S y T son subespacios afines de dimensión 3 en K^4, entonces si se cortan, dim $S \cap T \geq 2$.

   Muestre un ejemplo donde $S \cap T = \emptyset$

3. Sea E el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que n (con el 0). Considere los elementos

$$x_1(t) = 1\,,\;\; x_2(t) = t\,,\;\; x_3(t) = \frac{t^2}{2!}\,, \ldots,\, x_{n+1}(t) = \frac{t^n}{n!}$$

   a) Demuestre que $x_1 \ldots x_{n+1}$ forman una base de E

   b) Sea $D : E \longrightarrow E$ dada por

$$D(p(t)) = p'(t) \quad \text{(la derivada), para} \quad p(t) \in E.$$

   Halle las matrices de $D, D^2, \ldots,$ en la base dada.

   c) Demuestre que id $+D : E \longrightarrow E$ es un isomorfismo

4. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M_4(\mathbb{C})$$

a) Calcule el polinomio característico de A

b) Encuentre el polinomio minimal de A

c) Es A diagonalizable?. De ser así, encuentre una base donde se diagonalice.

5. Sea $f : E \longrightarrow E$ un isomorfismo y $N : E \longrightarrow E$ una función lineal nilpotente. Suponga que f y N conmutan: $f \circ N = N \circ f$. Demuestre que $f + N$ es un isomorfismo
Sugerencia: Piense en la igualdad de polinomios

$$1 - w^s = (1 - w)(1 + w + \cdots + w^{s-1})$$

y úselo.